Algoritmi e Strutture Dati

Analisi di algoritmi ricorsivi: Il Teorema master (*)

Punto della situazione

- Abbiamo imparato i concetti fondamentali di complessità (temporale o spaziale) di un algoritmo, e quelli di delimitazione superiore (*upper bound*) e inferiore (*lower bound*) alla complessità (temporale o spaziale) di un problema
- Ad esempio, l'algoritmo di ricerca sequenziale di un elemento in un insieme non ordinato di n elementi ha complessità temporale $T(n) = O(n)$, in quanto su alcune istanze costa $\Theta(n)$, mentre su altre costa $o(n)$. Ne consegue che l'*upper bound* al problema della ricerca di un elemento in un insieme non ordinato di n elementi è pari a $O(n)$
- Invece, il *lower bound* temporale del problema della ricerca di un elemento in un insieme non ordinato di n elementi è pari a $\Omega(n)$: infatti, ogni algoritmo di risoluzione deve per forza di cose guardare tutti gli elementi dell'insieme per decidere se l'elemento cercato appartiene o meno ad esso! Quindi, l'algoritmo di ricerca sequenziale è ottimo!
- Infine, l'algoritmo di ricerca binaria di un elemento in un insieme ordinato di n elementi ha complessità temporale $T(n) = O(\log n)$, mentre, per quanto ne sappiamo al momento, il *lower bound* temporale del problema della ricerca di un elemento in un insieme ordinato di n elementi è quello banale di $\Omega(1)$. Vedremo più avanti che anche questo algoritmo è ottimo!

Ricerca binaria in forma ricorsiva

L'algoritmo di ricerca binaria può essere riscritto ricorsivamente come:

algoritmo `ricercaBinariaRic`$(array\ L,\ elemento\ x) \rightarrow booleano$

  $n \leftarrow$ lunghezza di L

  if $(\ n = 0\ )$ **then return** non trovato

  $i \leftarrow \lceil n/2 \rceil$

  if $(\ L[i] = x\ )$ **then return** trovato

  else if $(\ L[i] > x\ )$ **then return** `ricercaBinariaRic`$(L[1; i-1], x)$

    else return `ricercaBinariaRic`$(L[i+1; n], x)$

Come analizzarlo?

Equazioni di ricorrenza

Il tempo di esecuzione dell'algoritmo può essere descritto tramite l'equazione di ricorrenza:

$$T(n) \leq \begin{cases} \Theta(1) + T(\lceil (n-1)/2 \rceil) & \text{se } n \geq 1 \\ \Theta(1) & \text{se } n=0 \end{cases}$$

dove $\Theta(1)$ è il costo (costante) che viene speso all'interno di ogni chiamata ricorsiva (si noti che utilizzo il simbolo $\leq$ perché l'algoritmo può terminare in una qualsiasi chiamata ricorsiva).

Mostreremo tre metodi per risolvere equazioni di ricorrenza: iterazione, sostituzione, e teorema Master

Metodo dell'iterazione

Idea: "srotolare" la ricorsione, ottenendo una sommatoria dipendente solo dalla dimensione n del problema iniziale (già visto per `Fibonacci6`)

Nel caso della ricerca binaria, semplificando leggermente la relazione di ricorrenza a $T(n) \le \Theta(1) + T(n/2)$:

$$T(n) \le \Theta(1) + T(n/2) \le \Theta(1) + (\Theta(1) + T(n/4)) \le$$
$$\le \Theta(1) + (\Theta(1) + (\Theta(1) + T(n/8))) \le \ldots$$
$$\le \left(\sum_{j=1\ldots i} \Theta(1)\right) + T(n/2^i) = i \cdot \Theta(1) + T(n/2^i)$$

Per $i = \lfloor \log n \rfloor + 1$: $T(n) \le \Theta(1) \cdot \Theta(\log n) + T(0) = \Theta(\log n)$

Esercizi di approfondimento

Risolvere usando il metodo dell'iterazione le seguenti equazioni di ricorrenza:

- $T(n) = n + T(n-1), \quad T(1)=1;$

- $T(n) = 9\,T(n/3) + n, \quad T(1)=1;$
  (soluzione sul libro di testo: Esempio 2.4)

Metodo della sostituzione

Idea: "indovinare" una soluzione, ed usare l'induzione matematica per provare che la soluzione dell'equazione di ricorrenza è effettivamente quella intuita

Esempio: $T(n) = n + T(n/2)$, $T(1)=1$

Ipotizziamo che la soluzione sia $T(n) \leq c \cdot n$ per una costante c opportuna, e verifichiamolo:

- **Passo base:** $T(1)=1 \leq c \cdot 1$ per ogni $c \geq 1$ OK
- **Passo induttivo:** $T(n)= n + T(n/2) \leq n+c \cdot (n/2) = (c/2+1)n$
  Ma $(c/2+1)\, n \leq c\, n$ per $c \geq 2$, quindi $T(n) \leq c \cdot n$ per $c \geq 2$

Teorema Master

Permette di analizzare algoritmi basati sulla tecnica del *divide et impera*:

- dividi il problema (di dimensione iniziale n) in $a \geq 1$ sottoproblemi di dimensione n/b, $b>1$
- risolvi i sottoproblemi ricorsivamente
- ricombina le soluzioni

Sia $f(n)$ il tempo speso nella chiamata ricorsiva (escluse le sottochiamate ricorsive), incluso quindi il tempo per dividere e ricombinare istanze di dimensione n. La relazione di ricorrenza è data da:

$$T(n) = \begin{cases} a\,T(n/b) + f(n) & \text{se } n>1 \\ \Theta(1) & \text{se } n=1 \end{cases}$$

Camil Demetrescu, Irene Finocchi, Giuseppe F. Italiano

Esempio: algoritmo `fibonacci6`

algoritmo `fibonacci6`$(intero\ n) \rightarrow intero$

$A \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M \leftarrow$ `potenzaDiMatrice`$(A, n-1)$

return $M[1][1]$

funzione `potenzaDiMatrice`$(matrice\ A,\ intero\ k) \rightarrow matrice$

if ($k \leq 1$) **then** $M \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

else $M \leftarrow$ `potenzaDiMatrice`$(A, \lfloor k/2 \rfloor)$

$\quad M \leftarrow M \cdot M$

if (k è dispari) **then** $M \leftarrow M \cdot A$

return M

a=1, b=2, f(n)=Θ(1)

Esempio: algoritmo di ricerca binaria

algoritmo `ricercaBinariaRic`$(array\ L,\ elemento\ x) \rightarrow booleano$

$n \leftarrow$ lunghezza di L

if $(\ n = 0\ )$ **then return** non trovato

$i \leftarrow \lceil n/2 \rceil$

if $(\ L[i] = x\ )$ **then return** trovato

else if $(\ L[i] > x\ )$ **then return** `ricercaBinariaRic`$(L[1; i-1], x)$

else return `ricercaBinariaRic`$(L[i+1; n], x)$

a=1, b=2, f(n)=Θ(1)

Algoritmo `fibonacci2`

algoritmo `fibonacci2`*(intero n)* $\rightarrow$ *intero*
  if ($n \leq 2$) **then return** 1
  else return `fibonacci2`(n-1) +
      `fibonacci2`(n-2)

Ricorsivo? Sì

Divide et impera?

No, perché la dimensione dei sottoproblemi è $\Theta(n)$, e non $\Theta(n/b)$ con $b>1$

Teorema Master (o teorema principale)

La relazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} a\,T(n/b) + f(n) & \text{se } n>1 \\ \Theta(1) & \text{se } n=1 \end{cases}$$

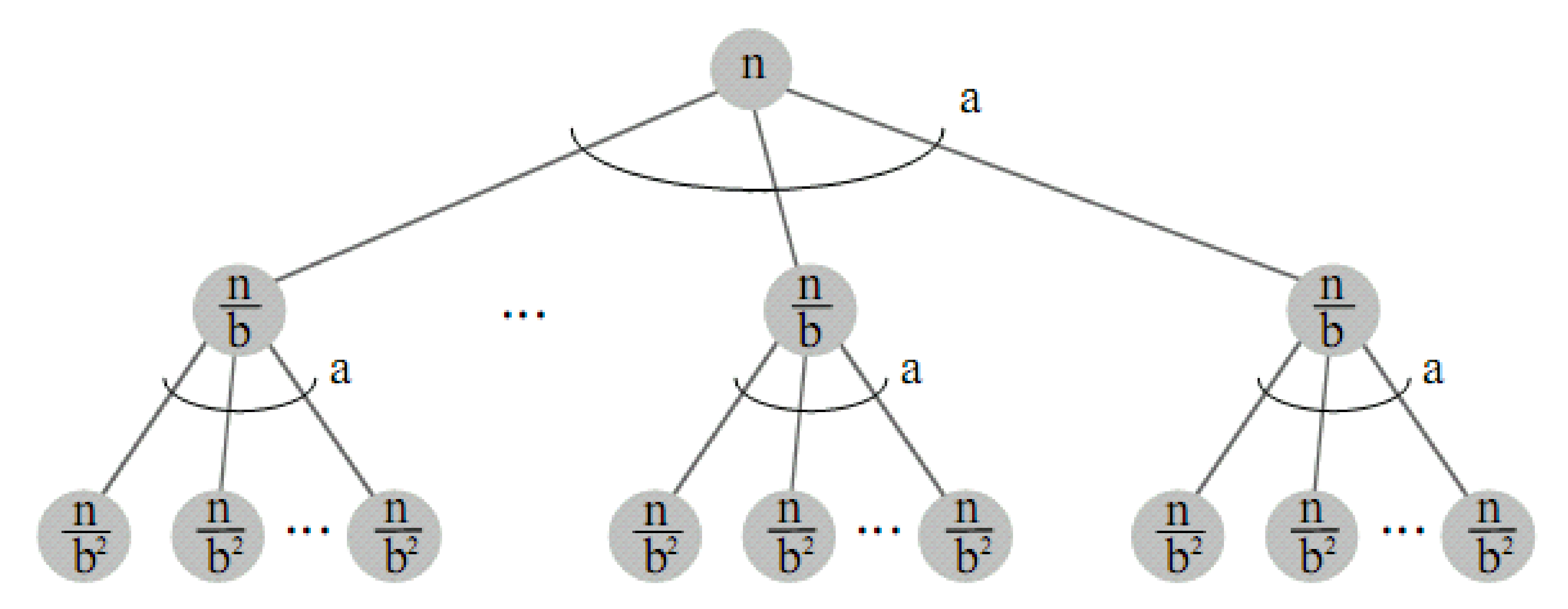
ha soluzione:

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ se $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ per qualche $\varepsilon>0$
2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log n)$ se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
3. $T(n) = \Theta(f(n))$ se $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ per qualche $\varepsilon>0$

(ma sotto l'ulteriore ipotesi che $f(n)$ soddisfi la *condizione di regolarità*: $a\,f(n/b)\leq c\,f(n)$ per qualche $c<1$ ed n sufficientemente grande)

Dimostrazione del caso 1

Albero della ricorsione



Proprietà dell'albero della ricorsione

- Proprietà 1: il numero di nodi a livello i dell'albero della ricorsione è a^i (ricorda che la radice è a livello 0)
- Proprietà 2: i sottoproblemi a livello i dell'albero della ricorsione hanno dimensione n/b^i
- Proprietà 3: il contributo al tempo di esecuzione di un nodo a livello i (escluso tempo sottochiamate ricorsive, che vengono conteggiate esplicitamente) è $f(n/b^i)$
- Proprietà 4: il numero di livelli dell'albero è (circa) $\log_b n$

$$T(n)=\sum_{i=0}^{\log_b n} a^i f(n/b^i)$$

…quindi, nel caso 1

$$f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$$

$$\Rightarrow \quad a^i f(n/b^i) = O(a^i (n/b^i)^{\log_b a - \varepsilon}) =$$

$$= O(n^{\log_b a - \varepsilon} (a\, b^{\varepsilon} / b^{\log_b a})^i) =$$

$$= O(n^{\log_b a - \varepsilon} (b^{\varepsilon})^i)$$

$$\mathbf{T(n)} = \sum_{i=0,\ldots,\log_b n} O(n^{\log_b a - \varepsilon} (b^{\varepsilon})^i) = O(n^{\log_b a - \varepsilon} \sum_{i=0,\ldots,\log_b n} (b^{\varepsilon})^i)$$

$$= O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\left(\frac{b^{\varepsilon(\log_b n + 1)} - 1}{b^{\varepsilon} - 1}\right)\right) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\left(\frac{b^{\varepsilon} n^{\varepsilon} - 1}{b^{\varepsilon} - 1}\right)\right)$$

$$= O(n^{\log_b a - \varepsilon} (n^{\varepsilon})) = \mathbf{O(n^{\log_b a})}$$

Inoltre, $T(n) \geq a^{\log_b n}$ (ultimo termine sommatoria slide precedente) $= b^{\log_b (a^{\log_b n})} = b^{\log_b n \cdot \log_b a} = n^{\log_b a}$ cioè $T(n) = \Omega(n^{\log_b a})$ da cui la tesi.

I casi 2 e 3 possono essere mostrati in modo analogo. QED

Esempi (per tutti assumiamo $T(1)=\Theta(1)$)

1) $T(n) = 2T(n/2) + n$

$a=2$, $b=2$, $f(n)=n=\Theta(n^{\log_2 2})$ ➡ caso 2 TM

➡ $T(n)=\Theta(n^{\log_2 2} \log n) = \Theta(n \log n)$

2) $T(n) = 3T(n/9) + 7$

$a=3$, $b=9$, $f(n)=7=O(n^{\log_9 3 - \varepsilon})$ ➡ caso 1 TM

➡ $T(n) =\Theta(n^{\log_9 3})=\Theta(\sqrt{n})$

3) $T(n) = 3T(n/9) + n$

$a=3$, $b=9$, $f(n)=n=\Omega(n^{\log_9 3 + \varepsilon})$

inoltre $3(n/9)\leq c\, n$ per $c\geq 1/3$ (ipotesi di regolarità)

➡ caso 3 del TM ➡ $T(n)=\Theta(n)$

Esempi

4) $T(n) = 2T(n/2)+n \log n$

$a=2$, $b=2$ e quindi ovviamente non ricade nel caso 1 perché

$$f(n)=n \log n \neq O(n^{\log_2 2-\varepsilon}) \equiv O(n^{1-\varepsilon})$$

inoltre $f(n) \neq \Theta(n^{\log_2 2})$, e quindi non ricade nel caso 2,

infine non esiste alcun $\varepsilon > 0$ per cui $f(n)=\Omega(n^{\log_2 2+\varepsilon}) \equiv \Omega(n^{1+\varepsilon})$

(infatti, $\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{n^{1+\varepsilon}} = \frac{\log n}{n^{\varepsilon}} = 0$ per ogni $\varepsilon > 0$)

non rientra nemmeno nel caso 3 e quindi
non si può applicare il teorema Master!

Esempi

5) $T(n) = 3T(n/3)+n/\log^4 n$

$a=3$, $b=3$ e quindi non ricade nel caso 2 perché

$$f(n)= n/\log^4 n \neq \Theta(n^{\log_3 3}) \equiv O(n)$$

inoltre ovviamente non rientra nel caso 3 perché

$f(n) \neq \Omega(n^{1+\varepsilon})$

infine non esiste alcun $\varepsilon > 0$ per cui $f(n)=O(n^{\log_3 3-\varepsilon})\equiv O(n^{1-\varepsilon})$

(infatti, $\lim_{n\to\infty} \frac{n/\log^4 n}{n^{1-\varepsilon}} = \frac{n^{\varepsilon}}{\log^4 n} = \infty$ per ogni $\varepsilon > 0$)

non rientra nemmeno nel caso 1 e quindi non si può applicare il teorema Master!